TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
Prof. Dr. Jürgen Scheurle

Höhere Mathematik II für Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 1

Sommersemester 2013

Zentralübung

Z1.1. Betrachten Sie die Funktion $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$.

(a) Bestimmen Sie die k-te Ableitung $\cosh^{(k)}(x)$. Verwenden Sie dabei die Bezeichnung $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$.

(b) Bestimmen Sie $T_n(x; 0)$, d.h. das Taylor-Polynom n-ten Grades von cosh zum Entwicklungspunkt 0.

(c) Bestimmen Sie cosh(1) mit einem Fehler $\leq \frac{1}{100}$. Verwenden Sie dazu $\mathrm{e} \leq 3$.

Z1.2. Bestimmen Sie die Taylor-Reihe $T(x)$ von $f(x) = \frac{1}{x+2}$ zum Entwicklungspunkt 0. Bestimmen Sie den Konvergenzradius von T. Zeigen Sie damit:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{4}{3}.$$

Z1.3. Gegeben sei die Potenzreihe

$$J_0(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}$$

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $J_0(x)$.

(b) Zeigen Sie, daß innerhalb des Konvergenzintervalls die folgende Gleichung gilt

$$x \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} J_0(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} J_0(x) + x J_0(x) = 0\,,$$

d.h. $f(x) := J_0(x)$ ist eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung der Ordnung n

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + x \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + (x^2 - n^2) f = 0$$

im Falle $n = 0$. Die Funktion $J_0(x)$ heißt Bessel-Funktion erster Art der Ordnung 0.

Tutorübungen

T1.1. Für $x > -2$ betrachten wir die Funktion $L(x) = \ln(2 + x)$.

(a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom n-ten Grades ($n \in \mathbb{N}$) von L zum Entwicklungspunkt $x_0 = -1$ und das zugehörige Lagrangesche Restglied.

(b) Begründen Sie die Identität :

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

T1.2. (a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen ($x \in \mathbb{R}$):

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} (k+3)\, x^k$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 5^k}\, x^k$

(b) Bestimmen Sie die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = x \cdot \sin(x)$ zum Entwicklungspunkt 0. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese? Gegen welche Funktion konvergiert sie gegebenenfalls?

T1.3. Verifizieren Sie mit Hilfe der jeweiligen Taylor-Reihendarstellungen, daß gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos(x) = -\sin(x).$$

Die Tutoraufgaben werden am 22.4.2013 bis 24.4.2013 besprochen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
Prof. Dr. Jürgen Scheurle

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Höhere Mathematik II für Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 2

Sommersemester 2013

Zentralübung

Z2.1. Verifizieren Sie mit Hilfe des Cauchy-Produkts, daß für $x \in \mathbb{R}$

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x).$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Nachweis verwenden, daß $\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+1)!}{(2k+1)!(2n-2k)!} = 2^n$ gilt!

Z2.2. (a) Zeigen Sie für $z \in \mathbb{C} \setminus \{2m\pi \mid m \in \mathbb{Z}\}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kz) = \frac{\sin(\frac{nz}{2})\ \cos(\frac{(n+1)z}{2})}{\sin(\frac{z}{2})}.$$

Hinweis: Wenden Sie die geometrische Summenformel auf $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ikz}$ an.

(b) Benutzen Sie das Ergebnis aus Teil (a) und Riemannsche Summen, um zu zeigen

$$\int_0^{x_0} \cos x \, dx = \sin x_0 \quad \text{für } x_0 > 0.$$

Z2.3. Berechnen Sie die von der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ eingeschlossene Fläche.

Tutorübungen

T2.1. (a) Handelt es sich bei den folgenden für $z \in \mathbb{C}$ definierten Reihen um Potenzreihen bzw. Taylorreihen? Falls ja, wie lautet die Koeffizientenfolge und wie der Entwicklungspunkt? Bestimmen Sie gegebenfalls die k-te Ableitung der dargestellten Funktion im Entwicklungspunkt.

(i) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!} \frac{1}{z^k}$

(ii) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{k(z-1)^k}{z^2}$

(iii) $7z^{15} + \frac{2}{3}z^7 - 12z^5 + z^2 + 2$

(iv) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{k!}\binom{k}{j} z^j$

(v) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{(2k)!}$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchyprodukts für $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 7^{-k} z^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 7^{-k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) 7^{-k} z^k.$$

Bestimmen Sie den Wert der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)7^{-k}z^k$ an der Stelle $z = 1$.
Hinweis: Die Reihen auf der linken Seite lassen sich mit Hilfe der geometrischen Reihe auswerten.

T2.2. Bestimmen Sie die Fläche, die von den Graphen der Funktionen $g(x) = x^3 - 11x$ und $h(x) = 2x^2 - 12$, $x \in \mathbb{R}$, eingeschlossen wird.

T2.3. (a) Sei $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie mit Hilfe der jeweiligen Potenzreihenentwicklung, daß $\cosh z$ eine Stammfunktion von $\sinh z$ ist.

(b) Bestimmen Sie die ersten vier Koeffizienten d_k, $k = 0, 1, 2, 3$ der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ von $\frac{1}{\cosh z}$, indem Sie die in der Vorlesung entwickelte Rekursionsformel für Kehrwerte von Potenzreihen auswerten.

Die Tutoraufgaben werden am 29.4.2013, 30.4.2013 und 8.5.2013 besprochen.

Höhere Mathematik II für Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 3

Sommersemester 2013

Zentralübung

Z3.1. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale. Verwenden Sie dazu partielle Integration und Substitution.

(a) $\int \cos x \sin^2 x \, \mathrm{d}x$

(b) $\int x \sin x \, \mathrm{d}x$

(c) $\int x(x-1)^{1/3} \, \mathrm{d}x$

Z3.2. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+1)^3}.$$

Z3.3. Berechnen Sie das Integral

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}$$

mittels Partialbruchzerlegung. Für welche $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existiert das (eventuell uneigentliche) Integral?

Tutorübungen

T3.1. Die Geschwindigkeit einer Rakete, die mit Startgeschwindigkeit $v(0) = 0$ abhebt ist durch

$$v(t) = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right) - gt$$

gegeben, wobei m_0 die Masse der Rakete beim Start, q die Rate des Massenausstoßes (und damit des Treibstoffverbrauches) und g die Erdbeschleunigung bezeichnet. Bis zu welcher maximalen Zeit $\hat{t}$ ist obiger Ausdruck für $v(t)$ definiert?

Bestimmen Sie den bis zu einer Zeit $t_f \leq \hat{t}$ zurückgelegten Weg

$$s(t_f) = \int_0^{t_f} v(t) \, \mathrm{d}t$$

unter der Annahme (näherungsweise) konstanter Erdbeschleunigung.

T3.2. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale. Geben Sie jeweils Ihren Lösungsweg an.

(a) $\int \cos\left(\mathrm{e}^{\sin(x)}\right) \cdot \mathrm{e}^{\sin(x)} \cdot \cos(x)\mathrm{d}x$

(b) $\int x \cdot \ln(x^2)\, \mathrm{d}x$

(c) $\int \frac{x^2-6x-7}{x^4-2x^3+5x^2-2x+4}\mathrm{d}x$

T3.3. Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale. Geben Sie jeweils Ihren Lösungsweg an.

(a) $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \cdot \mathrm{e}^{-1/x}\mathrm{d}x$

(b) $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{(2-x)^3}}\mathrm{d}x.$

(c) Berechnen Sie für $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \cos bx\ \mathrm{d}x.$$

Was passiert im Fall $a \leq 0$?

Schriftliche Übung

S3.1. (a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius und die Konvergenzkreisscheibe der folgenden Potenzreihe in $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{k+\mathrm{i}}{\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^k} \binom{2k}{k} z^k$$

Dabei bezeichnet $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ für $0 \leq m \leq n$ den Binomialkoeffizienten.

(b) Bestimmen Sie die Taylorreihe zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x \exp(x-1)$$

um $x_0 = 1$. Wo konvergiert diese Reihe?

(c) Wir betrachten die Van-der-Waals Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT\,,$$

die den Zusammenhang zwischen dem Druck p, der Temperatur T und dem molaren Volumen V eines Gases beschreibt. Dabei ist R die universelle Gaskonstante, a der Kohäsionsdruck und b das Kovolumen, die beide vom betrachteten Gas abhängen. Im Allgemeinen git $b \ll V$.

Stellen Sie den Druck p als Potenzreihe im Kehrwert des molaren Volumens V dar, d.h. lösen Sie die Van-der-Waals Gleichung zunächst nach p auf und wenden Sie dann die Formel der geometrischen Reihe auf den Term $1 - b/V$ an. Was erhalten Sie, wenn Sie nur den ersten Term dieser Reihe berücksichtigen?

Die Tutoraufgaben werden am 6.5.2013, 7.5.2013 und 15.5.2013 besprochen. Die schriftliche Übung wird an den genannten Tagen in den Tutorübungen abgegeben.

Bitte geben Sie Ihre Ausarbeitung der schriftlichen Übung nicht in Form loser Blätter ab (sondern z.B. in einem Schnellhefter oder Klarsichtordner), und schreiben Sie stets Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Bezeichnung Ihrer Tutorgruppe (z.B. Rupp (1), Huber (2), etc.) darauf.

Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Scheurle

Höhere Mathematik II für Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 4

Sommersemester 2013

Zentralübung

Z4.1. Berechnen Sie $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ und folgern Sie daraus die Existenz von $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

Z4.2. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, den man durch Rotation der Hyperbel

$$xy = a^2, \text{ wobei } a > 0$$

um die x-Achse, $a \le x \le 2a$, erhält.

Z4.3. Berechnen Sie die Oberfläche des Körpers, der durch Rotation des Graphen der Funktion

$$f(x) = \cos(x) \quad \text{mit } -\tfrac{\pi}{2} \le x \le \tfrac{\pi}{2}$$

um die x-Achse entsteht.

Tutorübungen

T4.1. Der Graph der Funktion $y = f(x) = \mathrm{e}^x$, die x-Achse, sowie die Geraden mit den Gleichungen $x = 0$ und $x = \ln(2)$ schließen die Fläche A ein. Diese rotiere um die x-Achse.

(a) Fertigen Sie eine Skizze der Fläche A in der (x, y)-Ebene an.

(b) Berechnen Sie Volumen und Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers.

T4.2. (a) Betrachten Sie die Fläche A, die nach oben durch den Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 4$ und nach unten durch die Hyperbel mit der Gleichung $y^2 - x^2 = 2$ ($y \ge 0$) begrenzt wird. Diese Fläche rotiere um die x-Achse.

(i) Fertigen Sie eine Skizze der Fläche A in der (x, y)-Ebene an.

(ii) Berechnen Sie Volumen und Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers.

(b) Die Fläche A werde von der x-Achse, der y-Achse und dem Graphen der Funktion $y = 4 - x^2$ ($0 \le x \le 2$) berandet. Diese Fläche rotiere um die y-Achse.

(i) Fertigen Sie eine Skizze der Fläche A in der (x, y)-Ebene an.

(ii) Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

T4.3. (a) Verwenden Sie das Majorantenkriterium um die Existenz des folgenden Integrals zu zeigen:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+5x+1}\,\mathrm{d}x$$

(b) Untersuchen Sie, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{10^{10}}{x^s + x^{1/s}}\,\mathrm{d}x\,, \qquad s > 0$$

existiert, indem Sie separat die drei Fälle $s \in\,]0,1[$, $s = 1$ und $s > 1$ mit geeigenten Majoranten bzw. Minoranten diskutieren.

Die Tutoraufgaben werden am 13.5.2013, 14.5.2013, 17.5.2013 und 22.5.2013 besprochen.

Aufgrund der Studententischen Vollversammlung am Dienstag, den 14.5.2013 von 9:45-11:15 werden die folgenden Tutorübungen auf Freitag, den 17.5.2013 von 15:00-16:30 verlegt:

Rupp (2)	**0220**
Frischmann (2)	**N1095**
Svilokos (2)	**1601**
Bergen (2)	**0360**
Pellekoorne (2)	**1260**
Überfuhr (2)	**0534**

Höhere Mathematik II für Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 5

Sommersemester 2013

Zentralübung

Z5.1. Berechnen Sie die Länge der Kurve $\mathbf{c} : \begin{cases} [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} 2\cos t - \cos(2t) \\ 2\sin t - \sin(2t) \end{pmatrix} \end{cases}$

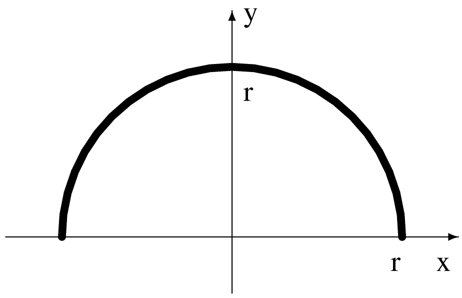
Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $s = 1 - \cos t$.

Z5.2. Berechnen Sie den Schwerpunkt des halbkreisförmigen Drahtes mit Radius $r > 0$ (vgl. Abbildung). Die Dichte des Drahtes sei durch

(a) $\rho_1(x, y) = 1$

(b) $\rho_2(x, y) = x^2 + 1$

gegeben.



Z5.3. Im $\mathbb{R}^3$ ist für $a, b > 0$ durch

$$\mathbf{c} : \begin{cases} [0, \pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ a\sin(t) \\ bt \end{pmatrix} \end{cases}$$

eine Schraubenlinie gegeben. Bestimme Sie den Schwerpunkt der Kurve für eine homogene Dichte $\rho(\mathbf{x}) = 1$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$).

Tutorübungen

T5.1. (a) Im 3-dimensionalen Raum schneidet der Drehzylinderfläche $\Phi : x^2 + y^2 = 1$ die Kugeloberfläche $\Sigma : (x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 4$ in einer geschlossenen Raumkurve $\Phi \cap \Sigma$, welche das sogenannten *Viviani-Fenster* berandet.

(i) Fertigen Sie eine aussagekräftige Skizze an.

(ii) Geben Sie eine Parametrisierung von $\Phi \cap \Sigma$ an.

(b) In der euklidischen Ebene sei für $T > 0$ die *Schleppkurve* (*Traktrix*) gegeben durch:

$$\mathbf{c} : \begin{cases} [0, T] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} t - \tanh(t) \\ \frac{1}{\cosh(t)} \end{pmatrix} \end{cases}$$

(i) Fertigen Sie eine aussagekräftige Skizze an.

(ii) Berechnen Sie die Länge der Kurve $\mathbf{c}$ für beliebiges $T > 0$.

T5.2. Im euklidischen Raum sei für $T > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ eine Kurve gegeben durch:

$$\mathbf{c} : \begin{cases} [0, T] & \to \quad \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto \quad \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \\ a \cdot \sinh(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

(a) Fertigen Sie eine aussagekräftige Skizze an.

(b) Berechnen Sie die Länge der Kurve $\mathbf{c}$ für beliebige $T > 0$ und $a \in \mathbb{R}$.

(c) Berechnen Sie für $T = 2$ und $a = 1$ den Schwerpunkt von $\mathbf{c}$ für eine homogene Dichte $\rho(\mathbf{x}) = 1$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$).

T5.3. Im Straßenbau und bei der Anlage von Eisenbahntrassen spielt die *Klothoide*

$$\mathbf{c} : \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ & \to \quad \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto \quad \begin{pmatrix} \int_0^t \cos(\tau^2)\mathrm{d}\tau \\ \int_0^t \sin(\tau^2)\mathrm{d}\tau \end{pmatrix} \end{cases}$$

die auch als *Spinnkurve* oder *Cornu-Spirale* bezeichnet wird, eine wichtige Rolle. Die *Fresnel'schen Integrale*, die in der Parameterdarstellung auftauchen, können nicht elementar dargestellt werden.

(a) Berechnen Sie die Bogenlängenfunktion $s(t)$ der Kurve mit $s(0) = 0$ und reparametrisieren Sie die Kurve nach der Bogenlänge.

(b) Berechnen Sie die Krümmungsfunktion $\kappa(s)$ der Klothoide.

(c) Überlegen Sie, aufgrund welcher Eigenschaft Klothoidenstücke neben Geraden und Kreisen zentrale Elemente im Straßen- und Trassenbau sein könnten.

Schriftliche Übung

S5.1. (a) Berechnen Sie mit Hilfe geeigneter Substitutionen die Integrale

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{und} \quad \int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{x^2-x}}\,\mathrm{d}x\,.$$

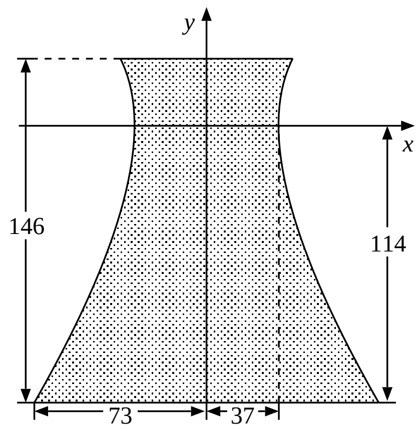
(b) Berechnen Sie mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x^4+2x^3-4x^2+x-1}{x^3-x^2-x+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

(c) Der Kühlturm eines AKW hat die Form (siehe Skizze) des durch Rotation der Hyperbel

$$\frac{x^2}{37^2} - \frac{y^2}{67^2} = 1, \quad -114 \le y \le 32$$

um die y-Achse gegebenen Rotationshyperboloids (alle Angaben in m). Berechnen Sie Volumen und Inhalt der Mantelfläche des Rotationskörpers.



Die Tutoraufgaben werden am 27.5.2013 bis 29.5.2013 besprochen. Die schriftliche Übung wird an dem genannten Tag in den Tutorübungen abgegeben.

Bitte geben Sie Ihre Ausarbeitung der schriftlichen Übung nicht in Form loser Blätter ab (sondern z.B. in einem Schnellhefter oder Klarsichtordner), und schreiben Sie stets Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Bezeichnung Ihrer Tutorgruppe (z.B. Rupp (1), Huber (2), etc.) darauf.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
Prof. Dr. Jürgen Scheurle

Höhere Mathematik II für Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 6

Sommersemester 2013

Zentralübung

Z6.1. Betrachten Sie die auf $[0, 4)$ durch

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{für } 1 \leq t < 3 \\ -1 & \text{für } 3 \leq t < 4 \end{cases}$$

definierte und 4-periodisch fortgesetzte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.

(b) Verifizieren Sie die Konvergenz der Fourier-Reihe gegen $\frac{1}{2}\left[f(t^+) + f(t^-)\right]$ für $t = 0$ und $t = 2$.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Konvergenz der Fourier-Reihe in $t = 1$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

Z6.2. (a) Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe F_f der 2-periodischen Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ 2^x & \text{für } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

(b) Wie lautet die komplexe Fourier-Reihe F_g der verschobenen Funktion $g(x) = f(x + 1)$?

(c) Bestimmen Sie die Menge $F_g(\mathbb{Z})$.

Z6.3. (a) Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe der Funktion $f(t) = |\sin t|$.

(b) Berechnen Sie für $\omega \notin \mathbb{Z}$ die Koeffizienten $\gamma_k \in \mathbb{C}$ derart, daß die Fourier-Reihe

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$$

Lösung des Randwertproblems

$$\ddot{x} + \omega^2 x = |\sin t|, \qquad x(0) = x(2\pi), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi)$$

ist.

Hinweis: Sie dürfen davon ausgehen, daß die Fourier-Reihe zweimal gliedweise differenziert werden darf.

Z6.4. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f mit Ausnahme des Ursprungs in jedem Punkt stetig partiell differenzierbar ist. Zeigen Sie ferner, daß f im Ursprung sämtliche Richtungsableitungen besitzt, aber nicht stetig ist.

Z6.5. Betrachten Sie die Funktion $f: G \to \mathbb{R}$; $(x, y) \mapsto \arctan \frac{y}{x}$, wobei $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$.

(a) Berechnen Sie ∇f und Δf.

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_v f(x, y)$, wobei $v = (x, y)^T$, für beliebiges $(x, y) \in G$.

(c) Skizzieren Sie die Höhenlinien der Funktion f.

Tutorübungen

T6.1. Gegeben sei die auf $[0, \pi]$ definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \,. \end{cases}$$

Setzen sie die Funktion

(a) als gerade 2π-periodische Funktion

(b) als ungerade 2π-periodische Funktion

auf ganz $\mathbb{R}$ fort. Skizzieren sie jeweils den Funktionsverlauf und berechnen sie die reellen Fourierreihen. Bestimmen sie schließlich den Wert der Fourierreihen an den Stellen $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

T6.2. Wir betrachten die auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ \sin(x) & \text{für } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

definierte und π-periodisch fortgesetzte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie die Funktion.

(b) Berechnen Sie die komplexe Fourierreihe $\mathcal{F}_f$ von f.

(c) Bestimmen Sie hieraus die reelle Fourierreihe von f.

(d) Geben Sie die Werte der Fourierreihe $\mathcal{F}_f$ an den Stellen $x = -\frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{\pi}{2}$ an.

(e) Berechnen Sie die komplexe Fourierreihe der verschobenen Funktion $g(x) = f(x + \frac{\pi}{2})$.

T6.3. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x, y) = x^2y^2 + y^3 + x^2y + y$.

(a) Begründen Sie, daß f eine C^1-Funktion ist.

(b) Bestimmen Sie $\nabla f(1, 2)$.

(c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $D_{\mathbf{a}} f(1, 2)$ für $\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Tutoraufgaben werden am 3.6.2013 bis 5.6.2013 besprochen.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
Prof. Dr. Jürgen Scheurle

Höhere Mathematik II für Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 7

Sommersemester 2013

Zentralübung

Z7.1. Seien $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zwei C^1-Vektorfelder. Zeigen Sie, daß

$$\operatorname{div}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \langle \mathbf{g}, \operatorname{rot} \mathbf{f} \rangle - \langle \mathbf{f}, \operatorname{rot} \mathbf{g} \rangle \,,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichne.

Z7.2. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x, y) = \cos(x + y)\mathrm{e}^{xy}$. Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f zum Entwicklungspunkt $(0, 0)^T$

(a) unter Verwendung des Taylorschen Satzes

(b) unter Verwendung bekannter Reihenentwicklungen.

Z7.3. Berechnen Sie im $\mathbb{R}^3$ die Jacobi-Matrix der Funktion

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 \mathbf{x}$$

und mit Hilfe der Produktregel daraus die Jacobi-Matrix von

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{v}(\mathbf{x})\|^2.$$

Tutorübungen

T7.1. (a) Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und $\mathbf{u} \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ Welche der folgenden Ausdrücke sind sinnvoll?

(i) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$

(ii) $\operatorname{rot}(\operatorname{div} \mathbf{u})$

(iii) $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u})$

(iv) $\operatorname{rot}(f\mathbf{u})$

(b) Berechnen Sie für $f(\mathbf{x}) = xy + 2z$ und $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (z, y, x)^T$ die sinnvollen Ausdrücke aus Teilaufgabe (a), wobei $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$.

(c) Zeigen Sie, daß ein Gradientenfeld rotationsfrei ist.

T7.2. Bestimmen Sie für die zwei Funktionen

(a) $f :]0, \infty[\times]0, \infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

(b) $f : \mathbb{R} \times]0, \infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = y^x$$

jeweils das Taylorpolynom zweiten Grades zum Entwicklungspunkt $(1, 1)^T$.

T7.3. Für $r \in]0, \infty[$, $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ und $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, sowie für $x, y, z > 0$ seien die beiden Funktionen

$$\mathbf{f}(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \arctan(\frac{y}{x}) \\ \arccos(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) \end{pmatrix}$$

definiert (Transformation bzw. Rücktransformation zwischen Kugelkoordinaten und kartesischen Koordinaten).

(a) Zeigen Sie zunächst daß

$$(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(r, \varphi, \theta) \quad \text{und} \quad (\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(x, y, z)$$

jeweils die Identitätsabbildung liefern.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix J von $\mathbf{f}$ an der Stelle $(r, \varphi, \theta) = (1, 0, \frac{\pi}{2})$, sowie deren Inverse $K := (J)^{-1}$.

(c) Zeigen Sie, daß K die Jacobi-Matrix von $\mathbf{g}$ an der Stelle $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ ist.

Schriftliche Übung

S7.1. (a) Wir betrachten nochmals die in **T6.1.** auf $]0, \pi]$ definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & \text{für } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{für } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

und setzen diese π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort.

(i) Skizzieren Sie den Funktionsverlauf auf $\mathbb{R}$.

(ii) Berechnen Sie die komplexe Fourierreihe.

(iii) Bestimmen Sie den Wert der Fourierreihe an den Stellen $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

(iv) Berechnen Sie die reelle Fourierreihe der verschobenen Funktion $g(x) = f(x + \frac{1}{2}\pi)$.

(b) Wir betrachten die auf $]-1, 1]$ durch

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-t} & \text{für } -1 < t \leq 0 \\ \mathrm{e}^{t} - 1 & \text{für } 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

definierte und 2-periodisch fortgesetzte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(i) Skizzieren Sie die Funktion auf $\mathbb{R}$.

(ii) Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von F.

(iii) Geben Sie die Werte der Fourierreihe an den Stellen $t = -1$ und $t = 1$ an.

(c) Bezüglich welchen Skalarproduktes bilden die Funktionen $b_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $b_k(x) = \mathrm{e}^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$ ein Orthonormalsystem? Begründen Sie Ihre Antwort.

Die Tutoraufgaben werden am 10.6.2013 bis 12.6.2013 besprochen. Die schriftliche Übung wird an den genannten Tagen in den Tutorübungen abgegeben.

Bitte geben Sie Ihre Ausarbeitung der schriftlichen Übung nicht in Form loser Blätter ab (sondern z.B. in einem Schnellhefter oder Klarsichtordner), und schreiben Sie stets Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Bezeichnung Ihrer Tutorgruppe (z.B. Rupp (1), Huber (2), etc.) darauf.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
Prof. Dr. Jürgen Scheurle

Höhere Mathematik II für Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 8

Sommersemester 2013

Zentralübung

Z8.1. Bestimmen Sie die stationären Punkte der folgenden Funktion. Welche dieser Punkte sind lokale Extrema? Welcher Art sind diese?

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto (x^2 + 2y^2)\exp[-(x^2 + y^2)]$$

Z8.2. Die Spannung U an den Enden eines elektrischen Widerstandes R hängt mit der Stromstärke I eines ihn durchfließenden Gleichstroms durch das Ohmsche Gesetz zusammen:

$$R = \frac{U}{I}$$

(a) Es sei U mit dem Fehler ΔU und I mit dem Fehler ΔI gemessen. Wie groß ist der Fehler ΔR in erster Näherung? Oftmals sind ΔU und ΔI nicht exakt bekannt. In diesem Fall kann man jedoch $|\Delta U|$ und $|\Delta I|$ durch sogenannte Fehlertoleranzen abschätzen. Geben Sie eine Abschätzung in erster Näherung für $|\Delta R|$ in Abhängigkeit von $|\Delta U|$ und $|\Delta I|$ an.

(b) Folgende Meßwerte liegen vor: $U = (112 \pm 2.5)V$, $I = (18 \pm 0.4)A$. Welchen Wert und welche Abschätzung (in erster Näherung) erhält man für R? Geben Sie auch eine Abschätzung für den relativen Fehler $\frac{|\Delta R|}{R}$ in Prozent an.

Z8.3. Zeigen Sie, daß die durch

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$$

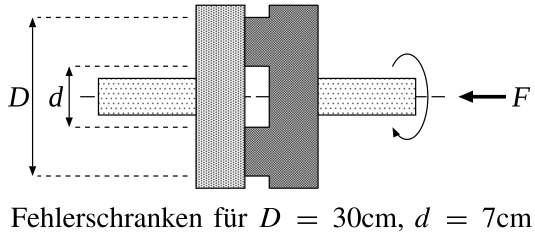
implizit definierte Funktion $y = f(x)$ mit $f(1) = 1$ an der Stelle $x = 1$ ein lokales Extremum besitzt und bestimmen Sie die Art dieses Extremums.

Tutorübungen

T8.1. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f und bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f zum Entwicklungspunkt $(0, 0)^T$.

T8.2. Das Übertragungsmoment M_R einer einfachen stirnseitigen Reibungskupplung berechnet sich zu

$$M_R = F \cdot \mu \cdot \frac{D^3 - d^3}{D^2 - d^2}$$



(μ ist die Reibungszahl). Berechnen Sie M_R und dessen Fehlerschranken für $D = 30$cm, $d = 7$cm (jeweils mit einem maximalen relativen Fehler von 0.7%), eine Kraft $F = 100$N (maximaler relativer Fehler 1%) und die Reibungszahl $\mu = 0.33$ (maximaler relativer Fehler 0.2%).

T8.3. Wir betrachten die Lösungsmenge der Gleichung

$$0 = f(x, y, z) := (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2 \cdot (x^2 + y^2)$$

im $\mathbb{R}^3$. Es sei $0 < r < R$.

(a) Zeigen Sie, daß $(x, y, z)^T = (R - r, 0, 0)^T$ die obige Gleichung erfüllt.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, daß $f(x, y, z) = 0$ in einer Umgebung von $(x, y, z)^T = (R - r, 0, 0)^T$ lokal nach $x = g(y, z)$ aufgelöst werden kann.

(c) Bestimmen Sie durch implizites Differenzieren der Gleichung

$$f(g(y, z), y, z) = 0$$

die partiellen Ableitungen $\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0)$ und $\frac{\partial g}{\partial z}(0, 0)$.

(d) Sei $y = 0 \pm \Delta y$ und $z = 0 \pm \Delta z$. Geben Sie dafür eine Fehlerabschätzung in erster Näherung für $x = g(y, z)$ an.

Die Tutoraufgaben werden am 17.6.2013 bis 19.6.2013 besprochen.

Höhere Mathematik II für Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 9

Sommersemester 2013

Zentralübung

Z9.1. Bestimmen Sie die globalen Maxima und Minima von $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2$ auf der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 1$.

Z9.2. Unter der Wirkung des Kraftfeldes $\mathbf{K}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ bewege sich in der (x, y)-Ebene ein Massenpunkt

(a) auf der Parabel $y = x^2$
(b) auf einer Geraden

vom Punkt $(1, 1)$ zum Punkt $(2, 4)$. Welche Arbeit wird hierbei jeweils geleistet?

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß das Kraftfeld konservativ ist.

Z9.3. Unter der Wirkung des Kraftfeldes $\mathbf{K}(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$ bewege sich in der (x, y)-Ebene ein Massenpunkt

(a) auf der Parabel $y = x^2$
(b) auf einer Geraden

vom Punkt $(1, 1)$ zum Punkt $(2, 4)$. Welche Arbeit wird hierbei jeweils geleistet?

Tutorübungen

T9.1. (a) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Bestimmen Sie für $\alpha > 0$ die globalen Extrema von f auf dem Dreieck

$$\Delta := \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3\alpha,\ 0 \leq y \leq 3\alpha - x\}\ .$$

(b) In welchen Fällen derartiger Optimierungsprobleme ist zur Bestimmung der Rand-Extrema die Langrage-Multiplikatorregel vorzuziehen und wann das Einsetzverfahren?

(c) Kann man mit Hilfe der Bedingung “Gradient = Nullvektor, Hessematrix negativ definit” alle lokalen Maxima einer jeden auf ganz $\mathbb{R}^n$ definierten C^2-Funktion finden?

T9.2. Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y, z) = x - y - z\ .$$

Die Funktion $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$\mathbf{g}(x, y, z) = (x^2 + 2y^2 - 1, 3x - 4z)^T\ .$$

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion f unter der Nebenbedingung $\mathbf{g}(x, y, z) = \mathbf{0}$ und klassifizieren Sie jene.

T9.3. Unter der Wirkung des Kraftfeldes

$$\mathbf{K}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xz^3 + 6y \\ 6x - 2yz \\ 3x^2z^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

bewege sich ein Massepunkt auf einer Geraden vom Punkt $(1, 1, 1)^T$ zum Punkt $(1, 1, 3)^T$. Welche Arbeit wird hierbei jeweils geleistet?

(a) Berechnen Sie zuerst das zugehörige Kurvenintegral 2. Art direkt.

(b) Zeigen Sie, daß das Kraftfeld **K** ein Potential besitzt und berechenen Sie dieses.

(c) Bestimmen Sie die gesuchte Arbeit mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.

Die Tutoraufgaben werden am 24.6.2013 bis 26.6.2013 besprochen.

Höhere Mathematik II für Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 10

Sommersemester 2013

Zentralübung

Z10.1. (a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_I \frac{1}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}(x,y),$$

wobei $I = [1,2] \times [3,4]$.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse $\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 16\}$.

Z10.2. Berechnen Sie die Masse und den Schwerpunkt der Halbkreisscheibe

$$B := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\, y \geq 0\}$$

mit $R > 0$ und Massendichte

(a) $\rho_1(x,y) = 1$

(b) $\rho_2(x,y) = y^2$

Hinweis: Für einen Körper $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, mit Massendichte $\rho(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D$, ist die Gesamtmasse gegeben durch $m(D) := \int_D \rho(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$. Der Schwerpunkt $\mathbf{x}_S \in \mathbb{R}^n$ von D ist damit gegeben durch $\mathbf{x}_S := \frac{1}{m(D)} \int_D \rho(\mathbf{x})\,\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$. Das Integral über die vektorwertige Funktion $\rho(\mathbf{x})\,\mathbf{x}$ ist hierbei komponentenweise zu berechnen.

Tutorübungen

T10.1. Skizzieren Sie die Bereiche $D_i \subset \mathbb{R}^3$, wobei

(a) $D_1 = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, x,y,z \geq 0,\, x+y+z \leq \sqrt{2} \text{ und } x^2 + y^2 \leq 1\}$

(b) $D_2 = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, x,y,z \geq 0,\, x^2+y^2+z^2 \leq 25 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 9\}$

und berechnen Sie deren Volumen.

T10.2. Berechnen Sie den Schwerpunkt des Bereichs $B \subset \mathbb{R}^2$, der in Polarkoordinaten von dem Spiralbogen $r(\varphi) = 1 + \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ und der Achse $\varphi = 0$ begrenzt wird.

T10.3. Berechnen Sie

$$\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y,$$

skizzieren Sie den Integrationsbereich und berechnen Sie das Integral anschliessend nochmal mit vertauschter Integrationsreihenfolge (bei erforderlicher Anpassung der Integrationsgrenzen).

Schriftliche Übung

S10.1. (a) Gegeben sei das Kraftfeld $\mathbf{K} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{K}(x, y) = \begin{pmatrix} \exp(xy) + xy \exp(xy) \\ x^2 \exp(xy) - 2y \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie direkt das Kurvenintegral 2. Art $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}$ entlang der stetig differenzierbaren Kurve $\mathbf{c} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit $t \mapsto \mathbf{c}(t) = (t, 1 - t^2)^T$.

(ii) Zeigen Sie, daß das Kraftfeld $\mathbf{K}$ ein Potential φ besitzt, bestimmen Sie dieses und berechnen Sie hiermit nochmals das Kurvenintegral.

(b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \frac{\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}}{x^2 + 1}.$$

(i) Bestimmen Sie die globalen Extrema von f auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Verwenden Sie zur Bestimmung der Randextrema die Lagrange-Multiplikatorregel.

(ii) Geben Sie das Taylorpolynom von f vom Grad 2 zum Entwicklungspunkt mit dem Ortsvektor $(0, 0)^T$ an.

Die Tutoraufgaben werden am 1.7.2013 bis 3.7.2013 besprochen. Die schriftliche Übung wird an den genannten Tagen in den Tutorübungen abgegeben.

Bitte geben Sie Ihre Ausarbeitung der schriftlichen Übung nicht in Form loser Blätter ab (sondern z.B. in einem Schnellhefter oder Klarsichtordner), und schreiben Sie stets Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Bezeichnung Ihrer Tutorgruppe (z.B. Rupp (1), Huber (2), etc.) darauf.

Höhere Mathematik II für Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 11

Sommersemester 2013

Zentralübung

Z11.1. Berechnung des Volumens mit dem Integralsatz von Gauß

(a) Folgern Sie aus dem Integralsatz von Gauß: Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet. Der Rand ∂G bestehe aus endlich vielen glatten Flächenstücken mit äußerer Normalen $\mathbf{n}(\mathbf{x})$. Dann gilt

$$\mathrm{vol}(G) = \frac{1}{3} \oint_{\partial G} \mathbf{x}\, \mathrm{d}\mathbf{o}.$$

(b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers $G \subset \mathbb{R}^3$, der von der Ebene $z = 0$ und dem elliptischen Paraboloid $z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ begrenzt wird, wobei $a, b > 0$.

Z11.2. Das Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch $\mathbf{f}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)^T$. Sei

$$Z = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid\ x^2 + y^2 \leq 1,\ \ -1 \leq z \leq 1\}.$$

Berechnen Sie das Oberflächenintegral 2. Art

$$\oint_{\partial Z} \mathbf{f}(x, y, z)\, \mathrm{d}\mathbf{o}$$

mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.

Tutorübungen

T11.1. Oberfläche des Torus

Es sei $0 < r < R$ fest gewählt. Durch die folgende Parametrisierung ist ein Torus (Oberfläche eines *Donuts*) im $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} (R + r\sin\psi)\cos\phi \\ (R + r\sin\psi)\sin\phi \\ r\cos\psi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \leq \psi < 2\pi, 0 \leq \phi < 2\pi \right\}$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt von T.

T11.2. Verifizieren Sie den Integralsatz von Stokes für das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

und die Fläche $F = \left\{(x, y, z)^T \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1, x^2 - y^2 = z\right\}$ im $\mathbb{R}^3$.

T11.3. Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ 1 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

mit $\mathbf{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$. Im folgenden sei $R > 0$. Berechnen Sie den Fluß $\int_M \operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{o}$ durch die Mantelfläche M des Zylinders

$$Z = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \le R^2, 0 \le z \le 1\}$$

sowohl direkt, als auch mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

Schriftliche Übung

S11.1. (a) Gegeben seien die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = x$ und der Bereich

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x, y, z \ge 0,\ x^2 + y^2 \le z \le 2\}.$$

Berechnen Sie das Bereichsintegral

$$\int_W f(x, y, z)\, \mathrm{d}(x, y, z).$$

(b) Rotiert ein starrer Körper K mit der Dichte $\rho(x, y, z)$ um eine Achse a, so berechnet sich das Trägheitsmoment I_a bezüglich dieser Achse zu

$$I_a = \int_K \rho(x, y, z)\, r^2(x, y, z)\, \mathrm{d}(x, y, z),$$

wobei $r(x, y, z)$ den Abstand des Punktes (x, y, z) von der Achse a bezeichnet. Berechnen Sie das Trägheitsmoment des homogenen ($\rho = 1$) Zylinders $x^2 + y^2 \le R$, $z \in [0, H]$ bezüglich der z-Achse.

(c) Was versteht man unter einer meßbaren Menge $D \subset \mathbb{R}^n$, was unter einer Nullmenge $D_0 \subset \mathbb{R}^n$?

Die Tutoraufgaben werden am 8.7.2013 bis 10.7.2013 besprochen. Die schriftliche Übung wird an den genannten Tagen in den Tutorübungen abgegeben.

Bitte geben Sie Ihre Ausarbeitung der schriftlichen Übung nicht in Form loser Blätter ab (sondern z.B. in einem Schnellhefter oder Klarsichtordner), und schreiben Sie stets Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Bezeichnung Ihrer Tutorgruppe (z.B. Rupp (1), Huber (2), etc.) darauf.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
Prof. Dr. Jürgen Scheurle

Höhere Mathematik II für Umweltingenieurwesen und Geodäsie — Blatt 12

Sommersemester 2013

Zentralübung

Z12.1. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$(1+\mathrm{e}^x)yy' = \mathrm{e}^x, \quad y(1) = 1.$$

Z12.2. Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des folgenden linearen Differentialgleichungssystems:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-5t \\ -8-8t \end{pmatrix},$$

wobei $t, u, v \in \mathbb{R}$.

Z12.3. Lösen Sie das Randwertproblem

$$f'' - f' - 6f - 15 = 0, \quad f(-1) = f(0) = 0.$$

Tutorübungen

T12.1. Lösen Sie die Anfangswertprobleme

(a) $y' = x^2y + x^2$ für $y(0) = 1$
(b) $y' = 2y \cdot x^{-1}$ für $x \geq 1$, und $y(1) = -3$.

Bestimmen Sie jeweils das maximale Existenzintervall der Lösung und skizzieren Sie diese.

T12.2. Auf Übungsblatt 10 zur Technischen Mechanik haben Sie die Knickstabdifferentialgleichung

$$w'''' + \alpha^2 w'' = 0, \quad \alpha = \frac{F}{EI} > 0$$

behandelt. Bestimmen Sie deren allgemeine reelle Lösung.

Lösen Sie für $\alpha = 1$ das zugehörige Randwertproblem auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ mit den Randbedingungen $w(0) = 1, w'(0) = 0, w''(0) = 0, w(2\pi) = 0$. Interpretieren Sie die Randbedingungen physikalisch.

T12.3. Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des folgenden Differentialgleichungssystems:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-5t \\ 2t \\ -8-8t \end{pmatrix},$$

wobei $t, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$.

Lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem zum Anfangswert $\mathbf{y}(0) = (0, 1, 0)^T$.

Welche Methoden zur Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung kennen Sie?

Die Tutoraufgaben werden am 15.7.2013 bis 17.7.2013 besprochen.