Sobre un problema de contacto en elasticidad

Memoria presentada por Miguel de Benito Delgado como

Trabajo de Fin de Grado en CC. Matemáticas por la UCM

bajo la tutela académica de

Jesús Ildefonso Díaz Díaz, catedrático del Departamento de Matemática Aplicada.

Julio de 2012

1 Elasticidad lineal

- El modelo.
- El problema.

2 Elasticidad lineal

- El modelo.
    - Sólido elástico, anisótropo y no homogéneo. Sin efectos termodinámicos.
    - Desplazamientos pequeños.
    - El tensor de esfuerzos

$$\sigma_{ij}(u) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u) = \frac{1}{2}a_{ijkl}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right).$$

- El problema.

3 Elasticidad lineal

- El modelo.
  - Sólido elástico, anisótropo y no homogéneo. Sin efectos termodinámicos.
  - Desplazamientos pequeños.
  - El tensor de esfuerzos

$$\sigma_{ij}(u) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u) = \frac{1}{2}a_{ijkl}\,(u_{k,l} + u_{l,k}).$$

- El problema.

  Sean $f \in \boldsymbol{C}(\Omega)$ y $U, g \in \boldsymbol{C}(\Gamma)$, con $\partial\Omega =: \Gamma = \Gamma_U \uplus \Gamma_g$. Encuéntrese $u \in \boldsymbol{C}^2(\Omega) \cap \boldsymbol{C}(\overline{\Omega})$, tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\mathrm{div}\,\sigma & = & f & \text{en} \quad \Omega, \\ u & = & U & \text{en} \quad \Gamma_U, \\ \sigma\,\nu & = & g & \text{en} \quad \Gamma_g. \end{array} \right.$$

3.1 Existencia y unicidad de solución

- La formulación débil.
- Gracias a la simetría.

3.2 Existencia y unicidad de solución

- La formulación débil.

  Sean $f \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $g \in \boldsymbol{H}^{-1/2}(\Gamma)$, $U \in \boldsymbol{H}^{1/2}(\Gamma)$ y sea $V := \{v \in \boldsymbol{H}^1(\Omega) \colon v = U \text{ en } \Gamma_U\}$. Encuéntrese $u \in V$ tal que

$$a(u, v-u) = F(v-u), \quad \text{para todo } v \in V,$$

  donde

$$a(u,v) := \int_\Omega \sigma_{ij}(u)\, v_{i,j}\, \mathrm{d}x \quad \text{y} \quad F(v) := \int_{\Gamma_g} g \cdot v \, \mathrm{d}s_x + \int_\Omega f \cdot v \, \mathrm{d}x.$$

- ◦ Gracias a la simetría.

3.3 Existencia y unicidad de solución

- La formulación débil.

  Sean $f \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $g \in \boldsymbol{H}^{-1/2}(\Gamma)$, $U \in \boldsymbol{H}^{1/2}(\Gamma)$ y sea $V := \{v \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)\colon v = U \text{ en } \Gamma_U\}$. Encuéntrese $u \in V$ tal que

$$a(u, v-u) = F(v-u), \quad \text{para todo } v \in V,$$

  donde

$$a(u,v) := \int_\Omega \sigma_{ij}(u)\, v_{i,j}\,\mathrm{d}x \quad \text{y} \quad F(v) := \int_{\Gamma_g} g \cdot v \,\mathrm{d}s_x + \int_\Omega f \cdot v \,\mathrm{d}x.$$

- Gracias a la simetría.

  Una aplicación directa del teorema de representación de F. Riesz (1907) / M. Fréchet (1907):

  Lema 3. *Sean V un espacio de Hilbert, $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ bilineal, continua, simétrica y tal que para todo $v \in V$ se cumple $a(v,v) \geqslant c_a \|v\|_V^2$ con $c_a > 0$ constante (V-elipticidad) y $F\colon V \to \mathbb{R}$ lineal y continua. Entonces existe un único $u \in V$ tal que $a(u,v) = F(v)$ para todo $v \in V$.*

4 El problema de la elipticidad

- La desigualdad fundamental (*estimación a priori*).
- El problema al aplicarla: los movimientos rígidos.

5 El problema de la elipticidad

- La desigualdad fundamental (*estimación a priori*).

Teorema 6. ***Desigualdad de Korn***. *Existe una constante* $c>0$ *dependiente de* Ω *tal que para todo* $v \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega v_i v_i\,\mathrm{d}x \geqslant c\,\|v\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)}.$$

La herramienta esencial para la demostración es:

Teorema 7. *(Amrouche y Girault, 1994) Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *abierto, acotado y de frontera Lipschitz,* $m \in \mathbb{Z}$, $p \in (1,\infty)$ *arbitrarios y*

$$X_{m,p}(\Omega) := \{v \in W^{m-1,p}(\Omega) \colon \nabla v \in \boldsymbol{W}^{m-1,p}(\Omega)\}.$$

Se cumple

$$X_{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega).$$

- El problema al aplicarla: los movimientos rígidos.

6 El problema de la elipticidad

- La desigualdad fundamental (*estimación a priori*).

  Teorema 8. ***Desigualdad de Korn***. *Existe una constante* $c > 0$ *dependiente de* Ω *tal que para todo* $v \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$

  $$\int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega v_i v_i\,\mathrm{d}x \geqslant c\,\|v\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)}.$$

  La herramienta esencial para la demostración es:

  Teorema 9. *(Amrouche y Girault, 1994) Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *abierto, acotado y de frontera Lipschitz,* $m \in \mathbb{Z}$, $p \in (1, \infty)$ *arbitrarios y*

  $$X_{m,p}(\Omega) := \{v \in W^{m-1,p}(\Omega) \colon \nabla v \in \boldsymbol{W}^{m-1,p}(\Omega)\}.$$

  Se cumple

  $$X_{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega).$$

- El problema al aplicarla: los movimientos rígidos.
  - Γ_U «suficientemente grande».
  - Solución en $\boldsymbol{H}^1(\Omega)/\mathcal{R}$.

7 Elasticidad lineal (escalar)

- Simplificaciones.
- El problema.
- Existencia y unicidad.

8 Elasticidad lineal (escalar)

- Simplificaciones.
  - Homogeneidad e isotropía.
  - Desplazamientos unidirecionales.
  - Para la membrana: versión variacional.
- El problema.
- Existencia y unicidad.

9 Elasticidad lineal (escalar)

- Simplificaciones.
  - Homogeneidad e isotropía.
  - Desplazamientos unidirecionales.
  - Para la membrana: versión variacional.
- El problema.

  Sean $f \in C(\Omega)$, $U, g \in C(\Gamma)$, $\alpha \geqslant 0$ y $\partial\Omega =: \Gamma = \Gamma_U \uplus \Gamma_g$. Encuéntrese $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, tal que

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha\, u &= f \quad \text{en} \quad \Omega, \\ u &= U \quad \text{en} \quad \Gamma_U, \\ -\partial_\nu u &= g \quad \text{en} \quad \Gamma_g. \end{cases}$$

- ○ Existencia y unicidad.

10 Elasticidad lineal (escalar)

- Simplificaciones.
  - Homogeneidad e isotropía.
  - Desplazamientos unidirecionales.
  - Para la membrana: versión variacional.
- El problema.

  Sean $f \in C(\Omega)$, $U, g \in C(\Gamma)$, $\alpha \geqslant 0$ y $\partial\Omega =: \Gamma = \Gamma_U \uplus \Gamma_g$. Encuéntrese $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, tal que

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha\, u & = & f & \text{en} & \Omega, \\ u & = & U & \text{en} & \Gamma_U, \\ -\partial_\nu u & = & g & \text{en} & \Gamma_g. \end{cases}$$

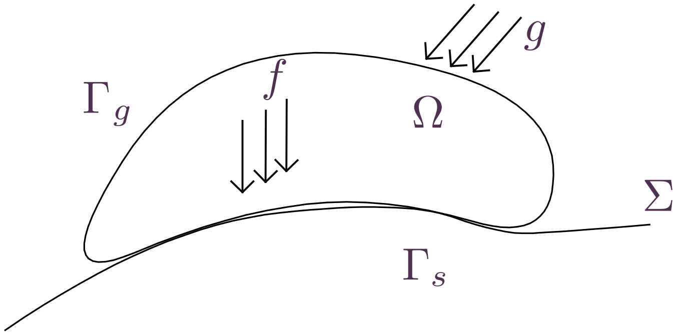
- Existencia y unicidad.
  - Γ_U «suficientemente grande».
  - Solución en $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ si $\alpha = 0$.

11 El problema de Signorini (vectorial)

- Sólido elástico en equilibrio estático sobre una superficie.
- Las condiciones de contorno: problema de **frontera libre**.
- La **región de coincidencia**.

12 El problema de Signorini (vectorial)

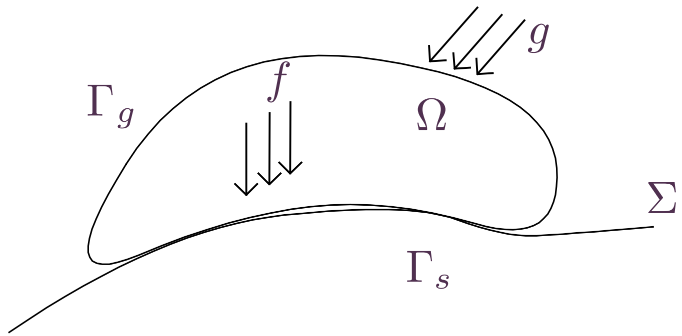
- Sólido elástico en equilibrio estático sobre una superficie.



- Las condiciones de contorno: problema de **frontera libre**.
- La **región de coincidencia**.

13 El problema de Signorini (vectorial)

- Sólido elástico en equilibrio estático sobre una superficie.



- Las condiciones de contorno: problema de **frontera libre**.

$$\sigma_{ij}\nu_j = g_i \quad \text{en} \quad \Gamma_g$$

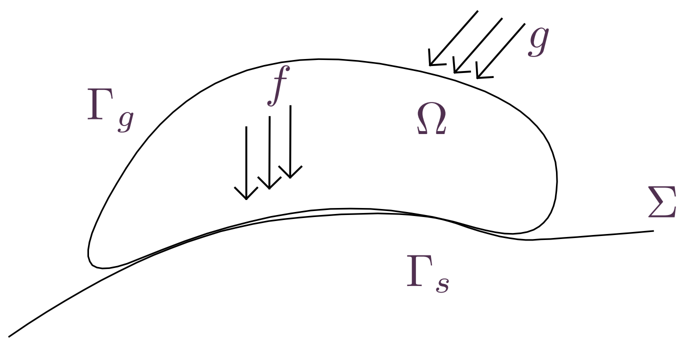
y

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_i\nu_i & = & 0, \\ \sigma_{ij}\nu_i\nu_j & < & 0, \\ \nu_i\sigma_{ij}\tau_j & = & 0, \end{array}\right. \quad \text{o bien} \quad \left\{\begin{array}{lcl} u_i\nu_i & < & 0, \\ \sigma_{ij}\nu_i\nu_j & = & 0, \\ \nu_i\sigma_{ij}\tau_j & = & 0. \end{array}\right. \quad \text{en } \Gamma_s.$$

- La **región de coincidencia**.

14 El problema de Signorini (vectorial)

- Sólido elástico en equilibrio estático sobre una superficie.



- Las condiciones de contorno: problema de **frontera libre**.

$$\sigma_{ij}\,\nu_j = g_i \quad \text{en} \quad \Gamma_g$$

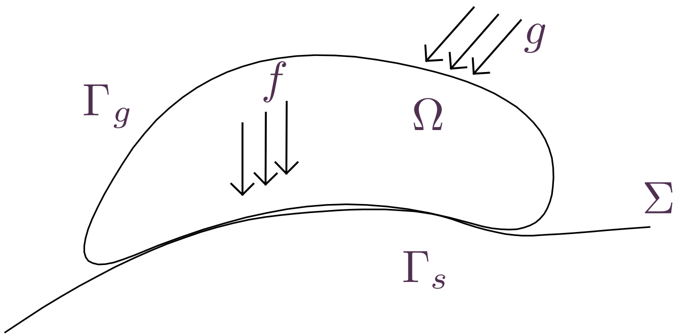
  y

$$\begin{cases} u_i\,\nu_i & = & 0, \\ \sigma_{ij}\,\nu_i\,\nu_j & < & 0, \\ \nu_i\,\sigma_{ij}\,\tau_j & = & 0, \end{cases} \text{ o bien } \begin{cases} u_i\,\nu_i & < & 0, \\ \sigma_{ij}\,\nu_i\,\nu_j & = & 0, \\ \nu_i\,\sigma_{ij}\,\tau_j & = & 0. \end{cases} \quad \text{en } \Gamma_s.$$

- La **región de coincidencia**.
  - $$I_0 := \{x \in \Gamma_s \colon u(x)\,\nu = 0\}.$$

15 El problema de Signorini (vectorial)

- Sólido elástico en equilibrio estático sobre una superficie.



- Las condiciones de contorno: problema de **frontera libre**.

$$\sigma_{ij}\,\nu_j = g_i \quad \text{en} \quad \Gamma_g$$

y

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_i\,\nu_i & = & 0, \\ \sigma_{ij}\,\nu_i\,\nu_j & < & 0, \\ \nu_i\,\sigma_{ij}\,\tau_j & = & 0, \end{array} \right. \quad \text{o bien} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u_i\,\nu_i & < & 0, \\ \sigma_{ij}\,\nu_i\,\nu_j & = & 0, \\ \nu_i\,\sigma_{ij}\,\tau_j & = & 0. \end{array} \right. \quad \text{en } \Gamma_s.$$

- La **región de coincidencia**.
  - $$I_0 := \{x \in \Gamma_s \colon u(x)\,\nu = 0\}.$$

Resultados de Kinderlehrer: existencia, medida y regularidad (en el plano: unión finita de intervalos y puntos).

16 Existencia y unicidad de solución.

- La formulación débil.
- No hay condiciones de tipo Dirichlet.
- La condición de compatibilidad.

17 Existencia y unicidad de solución.

- La formulación débil.

  Sean $f \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $g \in \boldsymbol{H}^{-1/2}(\Gamma_g)$. Encuéntrese $u \in V := \{v \in \boldsymbol{H}^1(\Omega) : v_i\,\nu_i \leqslant 0 \text{ en } \Gamma_s\}$ tal que

$$a(u, v-u) \geqslant F(v-u) \ \text{ para todo } v \in V.$$

  - No hay condiciones de tipo Dirichlet.
  - La condición de compatibilidad.

18 Existencia y unicidad de solución.

- La formulación débil.

  Sean $f \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $g \in \boldsymbol{H}^{-1/2}(\Gamma_g)$. Encuéntrese $u \in V := \{v \in \boldsymbol{H}^1(\Omega) : v_i\,\nu_i \leqslant 0 \text{ en } \Gamma_s\}$ tal que

$$a(u, v-u) \geqslant F(v-u) \ \text{ para todo } v \in V.$$

- No hay condiciones de tipo Dirichlet.

  Tenemos $\Gamma_U = \emptyset$, pero los movimientos rígidos importan: ¡no es lo mismo u que $u + 100$!

- ◦ La condición de compatibilidad.

19 Existencia y unicidad de solución.

- La formulación débil.

  Sean $f \in \boldsymbol{L}^2(\Omega), g \in \boldsymbol{H}^{-1/2}(\Gamma_g)$. Encuéntrese $u \in V := \{v \in \boldsymbol{H}^1(\Omega): v_i\, \nu_i \leqslant 0 \text{ en } \Gamma_s\}$ tal que

$$a(u, v-u) \geqslant F(v-u) \;\; \text{para todo } v \in V.$$

- No hay condiciones de tipo Dirichlet.

  Tenemos $\Gamma_U = \emptyset$, pero los movimientos rígidos importan: ¡no es lo mismo u que $u + 100$!

- La condición de compatibilidad.

$$F(\rho) = \int_\Omega f_i\, \rho_i\, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_g} g_i\, \rho_i\, \mathrm{d}s_x \leqslant 0 \text{ para todo } \rho \in \mathcal{R}. \tag{4}$$

(4) se cumple en el sentido fuerte si: se da la igualdad si y sólo si ρ es **bilateral**: $\rho \in V \cap \mathcal{R} \Longleftrightarrow -\rho \in V \cap \mathcal{R}$.

Teorema 13. *(Fichera, 1964) Sea $e(x, \varepsilon)$ una función continua y convexa en ε para cada x y sean $f \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $g \in \boldsymbol{L}^2(\Gamma_g)$ y $K_e = \{u \in \boldsymbol{H}^1(\Omega): e(x, \varepsilon(u)) \in \boldsymbol{L}^1(\Omega)\}$. Entonces $V \subset K_e$ y si existe una constante λ_0 positiva tal que $e(x, \varepsilon) > \lambda_0\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{ij}$, y la condición (4) se cumple en el sentido fuerte, entonces el funcional siguiente tiene un mínimo absoluto en V:*

$$I(u) := \int_\Omega e(x; \varepsilon(u))\, \mathrm{d}x - \int_\Omega f_i\, u_i\, \mathrm{d}x - \int_{\Gamma_g} g_i\, u_i\, \mathrm{d}s_x.$$

20 El problema de Signorini (escalar)

- Ecuaciones.
- Existencia, unicidad y regularidad.
- La región de coincidencia.

21 El problema de Signorini (escalar)

- Ecuaciones.

  Sean $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{-1/2}(\Gamma_g)$, $\psi \in H^{1/2}(\Omega)$, $\alpha > 0$. Encuéntrese $u \in H^1(\Omega)$ tal que (en sentido débil):

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u + \alpha\, u & = & f & \text{en } \Omega, \\ u & \geqslant & \psi & \text{sobre } \Gamma, \\ (-\partial_\nu u + g)(u - \psi) & = & 0 & \text{sobre } \Gamma, \\ \partial_\nu u & \geqslant & g & \text{sobre } \Gamma. \end{array}\right.$$

- Existencia, unicidad y regularidad.
- La región de coincidencia.

22 El problema de Signorini (escalar)

- Ecuaciones.

  Sean $f \in L^2(\Omega), g \in H^{-1/2}(\Gamma_g), \psi \in H^{1/2}(\Omega), \alpha > 0$. Encuéntrese $u \in H^1(\Omega)$ tal que (en sentido débil):

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u + \alpha u & = & f & \text{en } \Omega, \\ u & \geqslant & \psi & \text{sobre } \Gamma, \\ (-\partial_\nu u + g)(u - \psi) & = & 0 & \text{sobre } \Gamma, \\ \partial_\nu u & \geqslant & g & \text{sobre } \Gamma. \end{array}\right.$$

- Existencia, unicidad y regularidad.

  Haïm Brézis, 1972.

- ○ La región de coincidencia.

23 El problema de Signorini (escalar)

- Ecuaciones.

  Sean $f \in L^2(\Omega), g \in H^{-1/2}(\Gamma_g), \psi \in H^{1/2}(\Omega), \alpha > 0$. Encuéntrese $u \in H^1(\Omega)$ tal que (en sentido débil):

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u &= f \quad \text{en } \Omega, \\ u &\geqslant \psi \quad \text{sobre } \Gamma, \\ (-\partial_\nu u + g)(u - \psi) &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \\ \partial_\nu u &\geqslant g \quad \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

- Existencia, unicidad y regularidad.

  Haïm Brézis, 1972.

- La región de coincidencia.

$$I_\psi := \{x \in \Gamma : u(x) = \psi(x)\}.$$

  Resultados de **localización** de *Díaz, 1980* y *Díaz y Jiménez, 1988*.

24 Localización de la región de coincidencia

- La condición necesaria.
- La condición es «casi» suficiente.

25 Localización de la región de coincidencia

- La condición necesaria.

Teorema 16. *(Díaz y Jiménez, 1988) Sea* $u_0 \in H^2(\Omega)$ *la solución única de*

$$\begin{cases} -\Delta u_0 + \alpha u_0 = f & \textit{en } \Omega, \\ u_0 = \psi & \textit{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Supóngase que la región de coincidencia I_ψ *tiene medida positiva y es suave y sea* $\tilde{g} := g - \partial_\nu u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$*. Entonces necesariamente ocurre que* $\tilde{g} \leqslant 0$ *en* I_ψ*.*

- La condición es «casi» suficiente.

26 Localización de la región de coincidencia

- La condición necesaria.

Teorema 18. *(Díaz y Jiménez, 1988) Sea* $u_0 \in H^2(\Omega)$ *la solución única de*

$$\begin{cases} -\Delta u_0 + \alpha\, u_0 & = & f & \textit{en } \Omega, \\ u_0 & = & \psi & \textit{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Supóngase que la región de coincidencia I_ψ *tiene medida positiva y es suave y sea* $\tilde{g} := g - \partial_\nu u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$*. Entonces necesariamente ocurre que* $\tilde{g} \leqslant 0$ *en* I_ψ*.*

- La condición es «casi» suficiente.

Teorema 19. *(Díaz y Jiménez, 1988) Sea* Ω *un abierto convexo de* $\mathbb{R}^N$ *y sea* $u \in H^2(\Omega) \cup L^\infty(\Omega)$ *una solución del problema escalar con cota* $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant M$*. Supóngase que existen* $\delta > 0$ *y* $\Gamma_\delta \subset \Gamma$ *tales que*

$$\tilde{g}(\xi) \leqslant -\delta \ \textit{en } \Gamma_\delta,$$

con $\tilde{g}$ *definida como en el teorema 18. Entonces se tiene la estimación*

$$I_\psi \supset \{\xi \in \Gamma_\delta : d(\xi, \Gamma \backslash \Gamma_\delta) \geqslant R = 2\, M\, N / \delta\}.$$

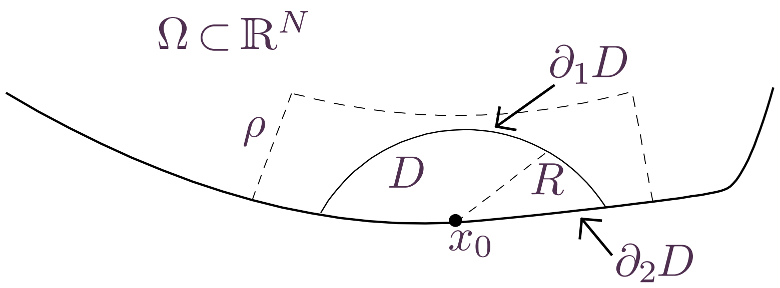
27 Supersoluciones locales

- Construcción y comparación.
- Experiencia casera.
- Limitaciones.

28 Supersoluciones locales

- Construcción y comparación.

  u y $\overline{u}$ soluciones del mismo problema con datos diferentes y adecuados $\Rightarrow 0 \leqslant u \leqslant \overline{u} = 0$ en un subconjunto.

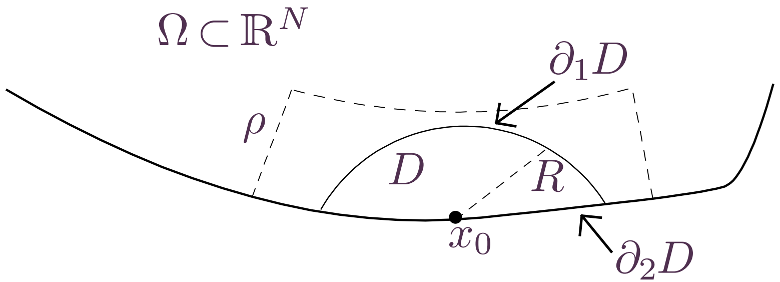


  - Experiencia casera.
  - Limitaciones.

29 Supersoluciones locales

- Construcción y comparación.

  u y $\overline{u}$ soluciones del mismo problema con datos diferentes y adecuados $\Rightarrow 0 \leqslant u \leqslant \overline{u} = 0$ en un subconjunto.



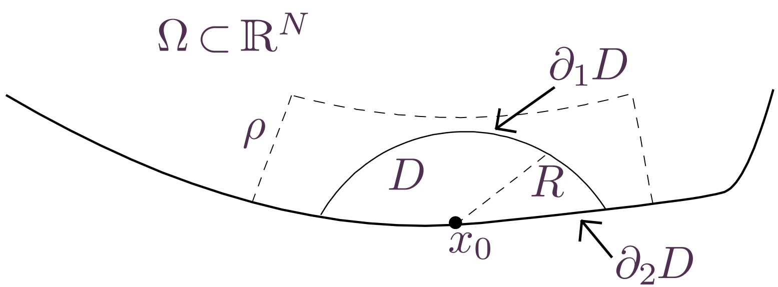
- Experiencia casera.

- Limitaciones.

30 Supersoluciones locales

- Construcción y comparación.

  u y $\overline{u}$ soluciones del mismo problema con datos diferentes y adecuados $\Rightarrow 0 \leqslant u \leqslant \overline{u} = 0$ en un subconjunto.



- Experiencia casera.

- Limitaciones.
    - Artesanía.
    - Ecuaciones *escalares*.

31 Trabajo posterior y extensiones

- Caso vectorial.
- Análisis numérico.
- Otros problemas.

32 Trabajo posterior y extensiones

- Caso vectorial.
    - Sistemas de ecuaciones.
    - Métodos de la energía.
- Análisis numérico.
- Otros problemas.

33 Trabajo posterior y extensiones

- Caso vectorial.
  - Sistemas de ecuaciones.
  - Métodos de la energía.
- Análisis numérico.
  - Krause.
  - DUNE.
- Otros problemas.

34 Trabajo posterior y extensiones

- Caso vectorial.
  - Sistemas de ecuaciones.
  - Métodos de la energía.
- Análisis numérico.
  - Krause.
  - DUNE.
- Otros problemas.
  - En mecánica de contacto.
  - Fronteras libres.


BCDEFGHJK
LMNPSTVWXY